$f : \mathbb{Z}_p^n \longrightarrow \mathbb{Q}_p$.

$\parallel$

X, variété analytique (p-adique) de dim n.

<u>Thm</u> (Hironaka 1964). <u>Donné f,</u> il existe

$$h : Y \twoheadrightarrow X$$

où $\begin{cases} Y \text{ est variété analytique compacte} \\ X = \mathbb{Z}_p^n, \quad \text{de dim } n. \end{cases}$

h est analytique et surjectif.

$X_0 = \{ x \in X \mid f(x) = 0 \} \to$ mesure nulle fermé dans X

$\underline{Y_0} = \{ y \in Y \mid f \circ h(y) = 0 \} \to$ mes. nulle en Y.

f non-cste
$f \notin \mathbb{Z}$

$\underline{h : Y \setminus Y_0} \longrightarrow X \setminus X_0$ est une isomorphisme analytique.

$h|_{Y \setminus Y_0}$

pour $b \in Y$, localement autour b union finie disjointe de $\mathbb{Z}_p^n$

voisinage $\underline{\mathbb{Z}_p^n \ni y}$

$$f \circ h(y) = \varepsilon(y) \cdot \prod_{i=1}^{n} y^{N_i} \qquad N_i \geq 0$$

ε analytique jamais nulle. (unité analytique)

$$(\underbrace{\mathrm{Jac}\, h}_{})(y) = \eta(y) \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i^{n_i - 1} \qquad \underline{n_i \geq 1}$$

η analyt. jamais nulle

---

f, h comme donné.

$$Z_f(s) = \sum_{\substack{\text{recouvrement}\\ \text{fini de } Y \text{ en}\\ \text{pols ouverts}\\ B_j = \mathbb{Z}_p^n}} \int_{B_j} \Big| \prod_i \left| x_i \right|^{N_{ij} \cdot s} \left| y_i \right|^{n_{ij}-1} \Big| dy$$

$$\int_Y |f \circ h|^s \underbrace{(h^* |dx|)}_{|\mathrm{Jac}\, h|}$$

$$|\varepsilon| : \mathbb{Z}_p^n \to \underbrace{p^{\mathbb{Z}}}_{} \underbrace{\cup \{0\}}_{}$$

continue, à image finie.

supposer que $|\varepsilon|$ est cste.

$|\eta|$ est cste

$$Z_f(s) = \sum_j \underbrace{c_j \, d_j^s}_{c_j,\, d_j} \cdot \prod_{i=1}^{n} \int_{y_i \in \mathbb{Z}_p} |y_i|^{N_{ij} \cdot s + n_{ij} - 1} |dy_i|$$

$$p^{\mathbb{Z}}$$

$$\int_{y\in\mathbb{Z}_p} |y|^{Ns+n-1}\,|dy| = \sum_{k\geq 0} \int_{\mathrm{ord}\,y = k} |y|^{Ns+n-1}\,|dy|$$

$$= \sum_{k\geq 0} \underbrace{p^{-k(Ns+n)}}\cdot\underbrace{(1-p^{-1})}$$

$$= \underbrace{(1-p^{-1})}_{1}\cdot\frac{1}{1-p^{-Ns-n}}$$

$$= \frac{c}{1-p^{-n}t^{N}} \in \mathbb{Q}(t)$$

$$\sum_j \prod_{j\geq 1} c_j\, d_j^{s}\cdot\frac{1}{1-p^{-n_{ij}}t^{N_{ij}}} \in \mathbb{Q}(t)$$

Conclusion : Thm d'Igusa : (

$$\boxed{Z_{f,\mathbb{Q}_p}(s) \text{ est rationelle en } t = p^{-s}}$$

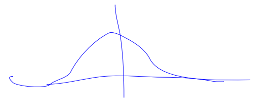
$Z_f \sim$ Poincaré (rationelle) $\left\{\begin{array}{l}\to P(t)\\ \to Q(t)\end{array}\right.$

$N_m \quad m\geq 0$

$\longrightarrow$ méromorphe en $s\in\mathbb{C}$

$\mathbb{Q}_p \sim \underline{\mathbb{R}}$. $\{ t \in \mathbb{C}$.

$$Z_{f,\mathbb{R},\phi}(s) = \int_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x)\, |f(x)|_{\mathbb{R}}^{s}\, dx$$

ϕ : 

. Schwartz

. C^∞ à support compact

monômes : $\underline{\text{méromorphe}}$ (∞ pôles sont possibles).

Changement via résolution de sing.

$\longrightarrow$ toujours méromorphe (chaque f).

$\underline{\text{stratégie alternative}}, \mathbb{R}$. (ne marche $\underline{\text{pas}}$ en $\mathbb{Q}_p$) $\to$ [conjecture].

$\boxed{\text{Bernstein-Sato}}$ ($\underline{\text{Igusa livre}}$ chap 4.)

Thm Il $\underline{\text{existe}}$ $\underbrace{P}$ dans $\underbrace{\mathbb{R}\left[x, \frac{\partial}{\partial x_i}\right]}_{i=1,\dots,n}$

$$\left(x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)(f(x))$$

non commutatif

$$\underbrace{x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}} \neq \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot x_1}$$

$$= \underbrace{x_1 \cdot f(x)}_{\in \mathbb{R}[x]} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$$

t.q. il y a $b(s) \in \mathbb{R}[s]$

avec $P \cdot \left(f(x)\right)^{s+1} = \underline{b(s)} \cdot \left(f(x)\right)^{s}$

tout $s \geq 0$, $s \in \mathbb{Z}$.

$\longrightarrow$ tout $b(s)$ qui apparaissent forment un idéal dans $\underline{\mathbb{R}[s]}$.

un unique générateur "monic" à coeff principal 1.

$\underline{s^n} + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$

$b_f(s)$: polynome de Bernstein-Sato.

$\underline{f(x) = x_1}$. $P = \frac{\partial}{\partial x_1}$

$P \cdot f^{s+1} = \underline{(s+1)} f^s$ $\quad b_f(s) = \underline{s+1}$

$$Z_{f, \mathbb{R}, \phi}(s) = \int_{U \subset \mathbb{R}^n} \phi(x) \, |f(x)|^s \, dx$$

P —— x_i $\qquad f^{s+1} \to f^s$

$f = x_1$ $\qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \to$ Intégration par partie

$$Z_{f,\mathbb{R},\phi}(s) = \int_{\substack{x_1 > 0 \\ x_1 \in \mathbb{R}}} \phi(x_1)\, x_1^s \, dx_1 \qquad Re(s) \geq 0$$

raisons générales : méromorphe sur $Re(s) > 0$.

$$\cancel{b_f(s)} \int \phi(x)\, x^s\, dx = \int \phi \cdot \underbrace{b_f(s) \cdot x^s}_{f(x)}\, dx \qquad \mathbb{C}\,?$$

$$= \int_{\substack{x>0 \\ \mathbb{R}_{>0}}} \phi(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} x^{s+1} \right) dx = \underbrace{\phi(x)\, x^{s+1} \Big|_0^{+\infty}}_{= 0} - \int_{x>0} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot x^{s+1}\, dx$$

$$= - \int_{x>0} \frac{\partial \phi}{\partial x}\, x^{s+1}\, dx$$

$\frac{\partial \phi}{\partial x}$: $\begin{cases} C^\infty \text{ à support compact} \\ \text{Schwartz.} \end{cases}$

analytique

méromorphe $Re(s) > -1$.

$Z_{f,\mathbb{R}}(s)$ est $\quad$ '' '' '' ''

... n fois

.... $\geq -n$

sur $\mathbb{C}$.

pôles sont contenues dans les zéros de $b_f(s+i)$ $i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{Z_{f, \mathbb{R}}(s) \cdot b_f(s) b_f(s+1) \cdots b_f(s+N)}$$

analytique $Re(s) > -N$.

b_f pas en p-adique !

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} |f(x)|_p}_{\text{localement cst.}} = 0 \quad p.p.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} x_2 \cdots x_1 |f(x)|^{s+1} \not\to |f(x)|^s$$

$= 0$

Conjecture forte d'Igusa de monodromie.

$$\boxed{\text{Les pôles de } Z_{f, \mathbb{Q}_p}(s) \text{ sont des zéros de } b_f(s).}$$?!

si t_0 est pôle complexe de $Z_{f, \mathbb{Q}_p}(s)$,

$t_0 = p^{-s_0}$ $s_0 \in \mathbb{C}$.

Re(s_0) est zéro de $b_f(s)$.

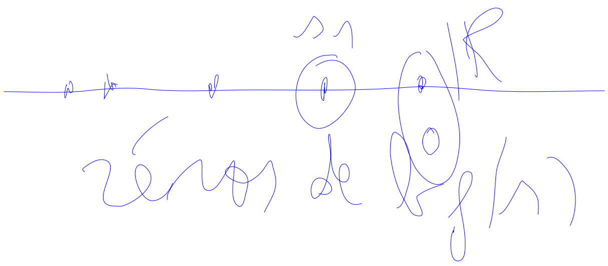
$b_f(\mathrm{Re}(s_0)) = 0$.

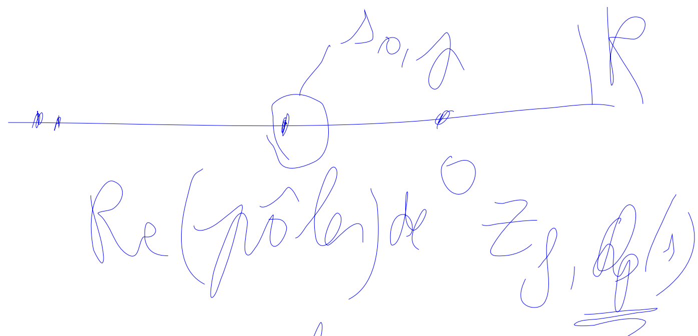
négatif et dans $\mathbb{Q}$.

$t_0 = p^{\frac{n}{N}}$

$$\frac{1}{1 - p^{-n} t^N} \longrightarrow \mathrm{Re}(s_0) = -\frac{n}{N} \in \mathbb{Q}$$

<u>Thm.</u> Les zéros de $b_f(s)$ sont aussi dans $\mathbb{Q}_{<0}$.





$s_{0,p} \leq s_1$ pour chaque p.

avec égalité pour une infinité de p : $s_{0,p} = s_1$

conj. de monodromie : $\{$ f pol en ≤ 2 vars.

$\quad$ ...